



سبق (۰۵۱-۳۸۱۱۷)

نام آزمون: آزمون ۳ تابع - وارون و یک به یک

تلگرام استاد شاکریان: @riazi_jazb

خرید محصولات: shakeryan.com

۱) تابع با ضابطه $y = x|x - 2|$ ، در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟
سراسری - ۱۳۹۴

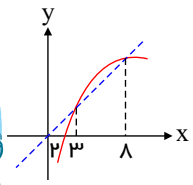
۲) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; x < 1$

۱) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}; x < 0$

۴) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

۳) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

۲) شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟
سراسری - ۱۳۹۴



۲) $[2, 3]$

۱) $(0, 2]$

۴) $[3, 8]$

۳) $[2, 8]$

۳) نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟
خارج از کشور - ۱۳۹۶

۴) $1, 4$

۳) $1, -4$

۲) $-1, 4$

۱) $-1, -4$

۴) ضابطه‌ی معکوس $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟
خارج از کشور - ۱۳۹۲

۲) $f^{-1}(x) = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R} - \{0\}$

۱) $f(x) = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R}$

۴) $f^{-1}(x) = x|x|; x \in \mathbb{R}$

۳) $f^{-1}(x) = x|x|; x \in \mathbb{R} - \{0\}$



۵) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه کدام است؟
خارج از کشور - ۱۳۹۴

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2; x > 3 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = -x + 7; x > 8 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1; -4 < x < 8 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = x + 7; x > -4 \quad (3)$$

۶) دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر

سراسری - ۱۳۹۶ $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

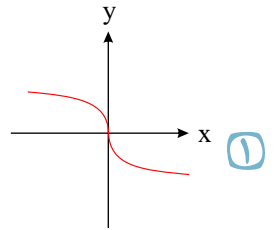
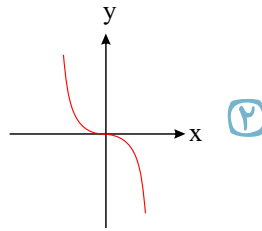
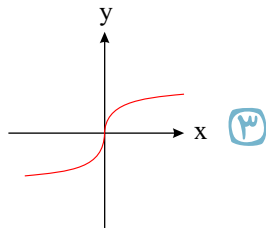
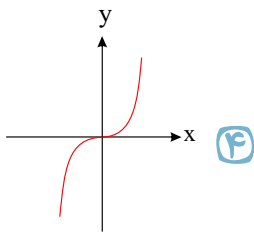
$$\frac{5}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

۷) اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟
سراسری - ۱۳۹۵



۸) دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x + 9}$ مفروض‌اند.

خارج از کشور - ۱۳۹۶ اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۹) اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع

خارج از کشور - ۱۳۹۸ باشند، برد تابع $(g^{-1} \circ f) - f$ کدام است؟

$$\{2, -1\} \quad (4)$$

$$\{3, 4\} \quad (3)$$

$$\{2, 3\} \quad (2)$$

$$\{-1, 4\} \quad (1)$$



۱۰ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشند.

سراسری - ۱۳۹۸

تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

- ۱ $\{(4, 2), (5, 2)\}$ ۲ $\{(4, 2), (3, 5)\}$ ۳ $\{(5, 2), (2, 4)\}$ ۴ $\{(3, 5), (2, 4)\}$

۱۱ فرض کنید در دامنه $[0, +\infty)$ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ مفروض باشد. $f^{-1}(2)$

سراسری - ۱۳۹۹

کدام است؟

- ۱ $\log_2(2 - \sqrt{3})$ ۲ $\log_2(\sqrt{3} - 1)$ ۳ $\log_2(1 + \sqrt{3})$ ۴ $\log_2(2 + \sqrt{3})$

۱۲ با فرض $f(x) = x^2 - 4x + 9$; $x \geq 2$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$

خارج از کشور - ۱۳۹۹

کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۶

۱۳ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز

خارج از کشور - ۱۳۹۹

ناحیه دوم را با کدام طول قطع می کند؟

- ۱ $-\frac{3}{2}$ ۲ $-\frac{3}{4}$ ۳ -1 ۴ $-\frac{1}{2}$

۱۴ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱ ۱۲ ۲ ۱۱ ۳ ۱۰ ۴ ۸

۱۵ نمودار معکوس تابع $f(x) = |x - 2| + 3x$ و نمودار خود تابع فقط در نقطه‌ی A متقاطع اند،

سنجش - ۱۳۹۴

فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدا مختصات کدام است؟

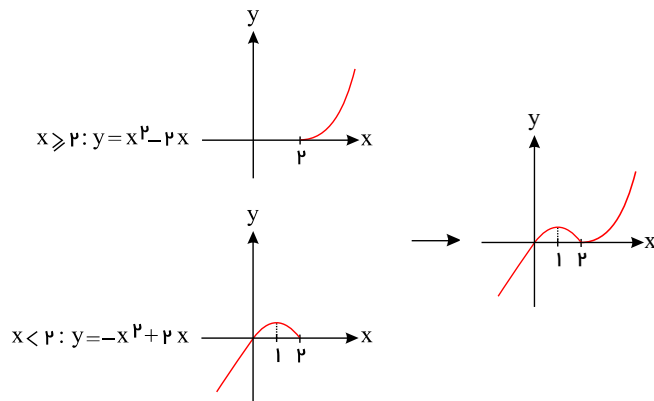
- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $2\sqrt{2}$ ۳ $2\sqrt{3}$ ۴ $\sqrt{3}$



پاسخنامه تشریحی

ابتدا با تعیین علامت، قدرمطلق را برمی داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$



پس تابع در (۱, ۲) نزولی است. حال ضابطه معکوس را پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned} y = -x^2 + 2x &\rightarrow y = -(x^2 - 2x) \rightarrow y = -((x-1)^2 - 1) \rightarrow y = -(x-1)^2 + 1 \\ \rightarrow (x-1)^2 &= 1-y \rightarrow x-1 = \pm \sqrt{1-y} \xrightarrow{1 < x < 2} x-1 = \sqrt{1-y} \rightarrow x = 1 + \sqrt{1-y} \\ &\text{سمت چپ مثبت است} \\ \rightarrow f^{-1}(x) &= 1 + \sqrt{1-x} \end{aligned}$$

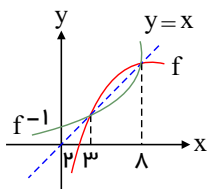
روش دوم:

متوجه شدیم که تابع، $y = -x^2 + 2x$ ($1 < x < 2$) است. یک عدد دلخواه مثلاً $x = \frac{3}{2}$ در تابع قرار می دهیم.

$$x = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4} \rightarrow \left| \frac{3}{4} \right| \in f \rightarrow \left| \frac{3}{4} \right| \in f^{-1} \rightarrow \text{فقط در گزینه سوم صدق می کند.}$$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ برای به دست آوردن دامنه ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگ تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$



نمودارهای f و f^{-1} نسبت به نیمساز ناحیه ی اول و سوم متقارن هستند و با توجه به $x \geq f^{-1}(x)$ باید به دنبال فواصلی باشیم که خط $y = x$ بزرگ تر مساوی تابع f^{-1} باشد یعنی $[3, 8]$.

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا وارون تابع داده شده را پیدا کرده و آن را با تابع اصلی تلاقی می دهیم و می دانیم برای پیدا کردن تابع وارون کافی است که x را بر حسب y به دست آورده و سپس جای x و y را عوض می کنیم.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+4}{x-2} \rightarrow xy - 2y = x + 4 \rightarrow xy - x = 2y + 4 \rightarrow x(y-1) = 2y + 4 \rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1} \\ \rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{2x+4}{x-1} \end{aligned}$$



تلاقی: $f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow \frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \rightarrow 2x^2 - 4x + 4x - 8 = x^2 - x + 4x - 4$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$y_1 = \sqrt{x}$ برد $y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x > 0$

$y = -\sqrt{-x} \rightarrow -x = y^2 \rightarrow x = -y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$
 $y_2 = -\sqrt{-x}$ برد

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases} \rightarrow f^{-1}(x) = x|x|, x \in \mathbb{R}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$2x-6$		$-$	$-$	$+$
$x+1$		$-$	$+$	$+$

در ابتدا باید تکلیف قدرمطلق ها را معلوم کنیم. پس از تابع مشتق گرفته و بزرگ تر از صفر قرار دهیم.

$x < -1$: $y = -2x + 6 - (-x - 1) \rightarrow y = -x + 7 \rightarrow y' = -1 < 0 \rightarrow$ نزولی

$-1 \leq x \leq 3$: $y = -2x + 6 - (x + 1) \rightarrow y = -3x + 5 \rightarrow y' = -3 < 0 \rightarrow$ نزولی

$x > 3$: $y = 2x - 6 - (x + 1) \rightarrow y = x - 7 \rightarrow y' = 1 > 0 \rightarrow$ صعودی

پس باید ضابطه‌ی معکوس تابع $y = x - 7$ را به ازای $x > 3$ به دست آوریم.

$$y = x - 7 \rightarrow x = y + 7 \rightarrow f^{-1}(x) = x + 7, x > -4$$

$x > 3$ توجه کنید: $y = x - 7 \xrightarrow{x > 3} y > -4$

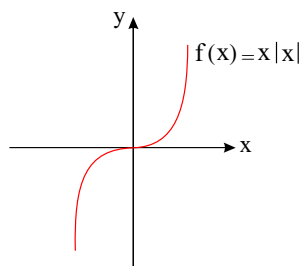
دقت کنید $-4 > y$ برد تابع f است که در حقیقت دامنه‌ی تابع معکوس است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

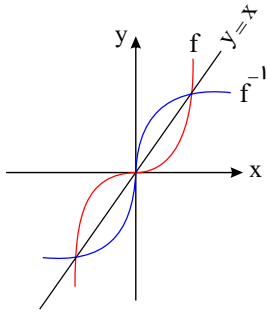
$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \rightarrow f(6) = g(2a) \rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \rightarrow 6a - 3 = 2a \rightarrow 4a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \rightarrow$$



آزمون 3 تابع - وارون و یک به یکی
 برای رسم تابع معکوس، کافی است قرینه‌ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، رسم کنیم.



۸ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$g^{-1} \circ f^{-1}(a) = 8 \rightarrow g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8 \rightarrow f^{-1}(a) = g(8) \rightarrow f^{-1}(a) = \sqrt{5(8) + 9} = \sqrt{49} = 7$$

$$\rightarrow f^{-1}(a) = 7 \rightarrow f(7) = a \rightarrow a = 3$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\} \rightarrow g^{-1}\{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$g^{-1} \circ f(x) : \begin{cases} g^{-1}(f(1)) = g^{-1}(2) = 4 \\ g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(5) = \emptyset \\ g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4) = \emptyset \\ g^{-1}(f(4)) = g^{-1}(6) = 5 \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$\begin{cases} g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\} \\ f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4 - 2), (4, 5 - 6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

بنابراین برد تابع به صورت $\{2, -1\}$ است.

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

$$g \circ f^{-1}(x) : \begin{cases} g(f^{-1}(2)) = g(1) = \emptyset \\ g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \\ g(f^{-1}(4)) = g(3) = 1 \\ g(f^{-1}(6)) = g(4) = 2 \end{cases} \rightarrow g \circ f^{-1}(x) = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

$$\text{پس: } \frac{g(x)}{g \circ f^{-1}(x)} = \left\{ \left(4, \frac{2}{1} \right), \left(5, \frac{6}{3} \right) \right\} = \{(4, 2), (5, 2)\}$$

۱۱ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است پس برای محاسبه $f^{-1}(2)$ کافی است در تابع اصلی به جای y و ۲ بگذاریم. ۱ ۲ ۳ ۴

بگذاریم.

$$2 = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{2^x = A} A + \frac{1}{A} = 4$$

$$\xrightarrow{\times A} A^2 + 1 = 4A \rightarrow A^2 - 4A + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \\ A = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\log_b^a c \rightarrow a = b^c$ است.



$$A = 2 + \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2(2 + \sqrt{3})$$

$$A = 2 - \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2(2 - \sqrt{3})$$

توجه کنید که $\log_2(2 - \sqrt{3})$ تقریباً معادل $\log_2(2 + \sqrt{3})$ است که حتماً مقدار آن منفی است و چون دامنه تابع شده بزرگتر مساوی صفر است بنابراین برد تابع معکوس نمی تواند منفی باشد.

۱۲) می دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است.

$$f^{-1} \circ g^{-1}(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9)) = f^{-1}(21) = 6$$

توجه کنید:

$$g^{-1}(-9) = a \rightarrow g(a) = -9 \rightarrow \frac{3-a}{2} = -9 \rightarrow 3-a = -18 \rightarrow a = 21$$

$$f^{-1}(21) = b \rightarrow f(b) = 21 \rightarrow b^2 - 4b + 9 = 21 \rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0 \rightarrow (b-6)(b+2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -2 \end{cases}$$

غ ق (با توجه به دامنه)

۱۳) می دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است برای آن که مشخص کنیم نمودار تابع $f^{-1}(x)$ ، نیمساز ناحیه دوم $(y = -x)$ را با کدام طول قطع می کند باید معادله $f^{-1}(x) = -x$ را حل کنید.

$$f^{-1}(x) = -x \rightarrow f(-x) = x \rightarrow -x - \frac{1}{-2x} = x \rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \rightarrow 4x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ غ ق} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید که در ناحیه دوم، $x < 0$ است.

۱۴) می دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است. سوال در حقیقت $f^{-1}(3) + f^{-1}(15)$ را خواسته است.

$$f^{-1}(3) = a \rightarrow f(a) = 3 \rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow a + b = 10$$

$$f^{-1}(15) = b \rightarrow f(b) = 15 \rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \rightarrow b = 9$$

۱۵) چون نمودار تابع و معکوسش فقط یک جا همدیگر را قطع می کنند آن جا حتماً روی نیمساز ناحیه اول و سوم است پس کافی است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.

$$f(x) = x \rightarrow |x-2| + 3x = x \rightarrow |x-2| = -2x \xrightarrow{\text{چون جواب قدر مطلق نا منفی است پس } x < 0} -x + 2 = -2x$$

$$\Rightarrow x = -2 \xrightarrow{\text{تابع}} y = -2 \rightarrow A \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$AO = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad A \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \end{vmatrix} \text{ را از مبدأ مختصات حساب می کنیم:}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴